Eichstätter Kolloquium zur
Didaktik der Mathematik

Februar 2008

Fourieranalysis und Kombinatorik

Gerd Mockenhaupt

1 Fourier Analysis und die Wellen-Gleichung

In der Physik werden elektromagnetische Wellen im Raum durch die Wellengleichung

$$(\frac{\partial}{\partial t})^2 u - \Delta u = 0, \qquad \text{wobei} \qquad \Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_3})^2, \tag{1.1}$$

beschrieben. Die zentralsymmetrischen Lösungen kann man explizit bestimmen. Sie sind gegeben durch

$$u_\lambda(t,x) = \frac{e^{i\lambda(r-t)}}{r}, \qquad \text{wobei} \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

der Abstand vom Punkt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ zum Ursprung des Koordinatensystems ist, und der konjugiert komplexen Lösung $\bar{u}_\lambda$. Sei $y \in \mathbb{R}^3$. Die Funktion

$$f(y)\ u_\lambda(t, x-y), \qquad x \neq y \tag{1.2}$$

beschreibt dann die Emission einer Strahlung vom Punkt y mit Frequenz $\lambda > 0$, wobei $f(y) = A(y)e^{i\phi(y)}$ die Amplitude $A(y) = |f(y)|$ und Phase $\phi(y)$ der emittierten Strahlung darstellt. Sei S eine Kurve oder Fläche in $\mathbb{R}^3$ und für $\delta > 0$ sei S_δ eine $\delta-$Umgebung von S (man denke etwa den Draht der Dicke δ in einer Glühbirne). Wird von jedem Punkt y in S_δ kontinuierlich Strahlung der Amplitude und Phase $f(y)$ emittiert, so wird für Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ außerhalb von S_δ die Strahlung beschrieben durch Überlagerung der Terme in (1.2), d.h. durch

$$e^{-i\lambda t} I_\lambda(x),$$

wobei

$$I_\lambda(x) = \iiint_{S_\delta} f(y)\ \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|}\ dy.$$

Ist x sehr weit von S_δ entfernt und S_δ in einem Ball mit Radius 1 und Zentrum im Ursprung enthalten, so kann man annehmen dass der Term im Nenner im wesentlichen durch $|x|$ ersetzt werden kann und in guter Näherung ist $|x-y| = |x| - \hat{x}\cdot y + \textit{kleiner Fehler}$, wobei $\hat{x} = x/|x|$ der Einheitsvektor in Richtung $x \neq 0$ ist und $\hat{x}\cdot y = \hat{x}_1 y_1 + \hat{x}_2 y_2 + \hat{x}_3 y_3$ das Skalarprodukt der Vektoren ist. Also gilt annähernd

$$I_\lambda(x) \approx \frac{e^{i|x|}}{|x|}\ \iiint_{S_\delta} f(y)\ e^{-i\lambda\hat{x}\cdot y}\ dy. \tag{1.3}$$

2 Die Fourier-Transformation und das Unbestimmtheitsprinzip.

Für eine intergrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nennt man

$$\hat{g}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, \ldots, y_n)\; e^{-2\pi i\,(\xi_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)}\; dy_1 \ldots dy_n$$

die Fourier-Transformierte von g. Eine genauere Untersuchung der Strahlung I_λ am Punkte x führt daher auf die Untersuchung der Fourier-Transformierten der Funktion $g(y) = \chi_{S_\delta}(y)\, f(y)$ im Punkte $\xi = \lambda \hat{x}$ (hier bezeichnet χ_S für eine beliebige Menge S die Funktion die den Wert 1 auf S und 0 sonst annimmt).
Elementare Eigenschaften der Fourier-Transformation:

Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei $M_a g(y) = e^{-2\pi i a \cdot y} g(y)$, d.h. M_a verändert die Phase der Funktion g durch Modulation mit einer *ebenen Welle*, und $\tau_a g(y) = g(a + y)$, die Translation der Funktion g um a. Es gilt dann:

$$\widehat{M_a g}(\xi) = \hat{g}(a + \xi) \qquad \text{und} \qquad \widehat{\tau_a g}(\xi) = (M_a \hat{g})(\xi). \tag{2.1}$$

Ist γ eine Drehmatrix, d.h. $\gamma\gamma^t = I$, so bezeichne $R_\gamma g(y) = g(\gamma y)$. Es gilt dann:

$$\widehat{R_\gamma g}(\xi) = R_\gamma \hat{g}(\xi). \tag{2.2}$$

Beispiel: Es sei $n = 1, a \in \mathbb{R}$ und für $1 > \varepsilon > 0$ sei $g(y) = e^{-\pi(y-a)^2/\varepsilon}$ (Gauß-Verteilung). Die Fourier-Transformierte von g ist explizit berechenbar und man findet

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\varepsilon}\, e^{-\pi\varepsilon\xi^2} e^{-2\pi i a y}.$$

Beobachtung: Für $|y - a| >> 10\sqrt{\varepsilon}$ sind die Werte der Funktion g von der Größenordnung e^{-314}. Andererseits sind die Werte ihrer Fourier-Transformierten für Werte $|\xi - 0| > 10/\sqrt{\varepsilon}$ von der Größenordnung $\sqrt{\varepsilon}e^{-314}$. Dieses Verhalten der Fourier-Transformation gilt allgemeiner und kann wie folgt beschrieben werden.

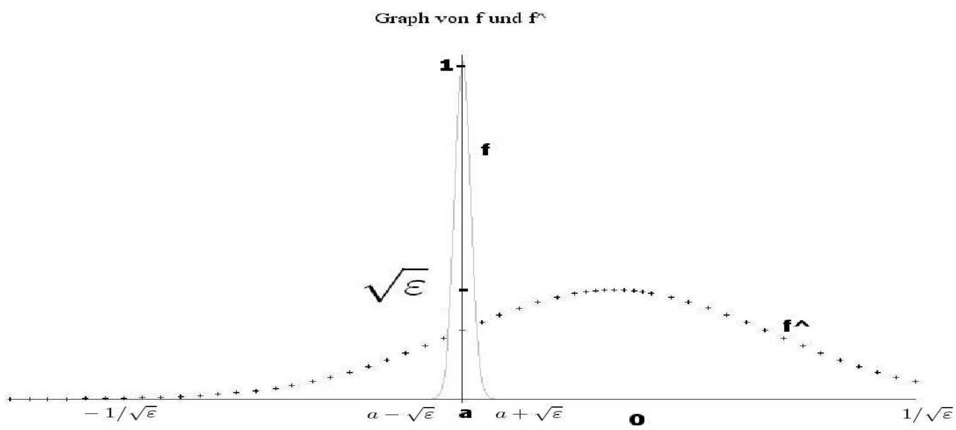


Abbildung 1: Unbestimmtheitsprinzip für $f(y) = e^{-\pi(y-a)^2/\varepsilon}$.

Heuristisches Unbestimmtheitsprinzip: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, R das Rechteck $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \times \cdots \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n], \varepsilon_i > 0, \forall i$ und $f(y) = 0$ falls $y \notin R$. Wir nehmen an, dass für alle partiellen Ableitungen von f gilt:

$$|\partial_{y_1}^{m_1} \ldots \partial_{y_n}^{m_n} f(y_1, \ldots, y_n)| \leq C_{m_1,\ldots,m_n}\; \varepsilon_1^{-m_1} \ldots \varepsilon_n^{-m_n},\ \forall y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

wobei die Konstanten $C_{m_1,\ldots,m_n}$ unabhängig von y und $\varepsilon_i, \forall i$, sind. Dann ist die Fourier-Transformierte von f außerhalb des Rechteckes $R^* = [-1/\varepsilon_1, 1/\varepsilon_1] \times \cdots \times [-1/\varepsilon_n, 1/\varepsilon_n]$ *vernachlässigbar klein.*

Man nennt R^* das zu R duale Rechteck und die Menge der Punkte $y \in \mathbb{R}^n$ auf der f nicht verschwindet den Träger von f, $\mathrm{supp}(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, f(y) \neq 0\}$. Wir bemerken, dass die Bedingung (2.3) erhalten bleibt falls man f durch $R_\gamma f$, bzw. $\tau_a f$ ersetzt (eventuell muss man die Konstanten $C_{m_1,\ldots,m_n}$ etwas vergrössern), und damit auch unter Kombinationen von Rotationen und Translationen. Allerdings verändert sich der Träger von f bzw. die Menge auf der $\hat{f}$ *vernachlässigbar klein* wird unter diesen Transformationen. Mit (2.1) und (2.2) folgt nun, dass wenn R ein beliebig gedrehtes und transliertes Rechteck mit Zentrum in einem beliebigen Punkte ist und *supp*$(f) \subset R$ und (2.3) gilt, die Fourier-Transformierte der modulierten Funktion $M_a f$ in einem entsprechenden *dualen* Rechteck mit Mittelpunkt in $-a$ im wesentlichen getragen ist, d.h. vernachlässigbar klein außerhalb des *dualen* Rechtecks ist.

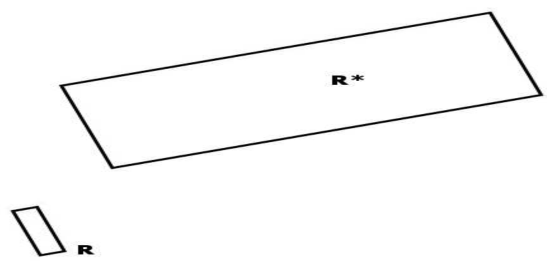


Abbildung 2: Rechteck R und dazu *duales* R^*.

Kommen wir zurück auf die Strahlung I_λ. Zur Vereinfachung betrachten wir jedoch zunächst ein zweidimensionales Analogon, d.h. wir untersuchen das Integral

$$\iint_{S_\delta} f(y_1, y_2)\ e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2)}\ dy_1 dy_2.$$

wobei S_δ eine $\delta-$Umgebung eines Kreises ist, d.h. $S_\delta = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 - \delta < |y| < 1 + \delta\}$ ist der Kreisring mit innnerem Radius $1 - \delta$ und äußerem Radius $1 + \delta$. Man kann in diesen Kreisring Rechtecke mit Kantenlängen $\sqrt{\delta}$ und δ plazieren, so dass etwa 1/10 von S_δ überdeckt wir (siehe Abbildung). Es passen etwa $N \approx 1/\sqrt{\delta}$ viele Rechtecke $R_1, \ldots, R_N$ dieser Grösse in den Kreisring. Es gilt also:

$$\cup_{j=1}^N R_j \subset S_\delta \qquad \text{und} \qquad |\cup_{j=1}^N R_j| > \frac{1}{10}|S_\delta|,$$

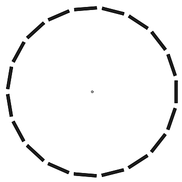
wobei wir mit $|A|$ den Flächeninhalt einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnen. Auf jedes dieser Rechtecke R_j legen wir nun eine Amplituden- und Phasenverteilung wie folgt: Es sei h_j eine Funktion die Bedingung (2.3) des Unbestimmheitsprinzip bezüglich des Rechteckes R_j erfüllt und a_j ein Punkt in $\mathbb{R}^2$. Wir setzen

$$f_j(x) := M_{a_j} h_j(x) \quad (= e^{ia_j \cdot x} h_j(x))$$

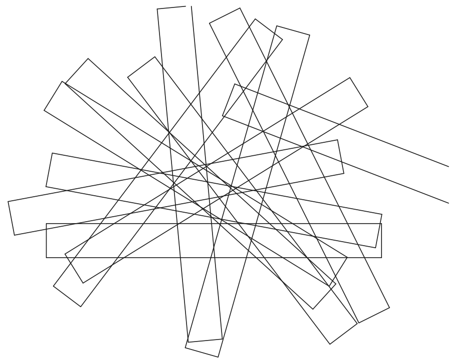
und schliesslich

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \pm 1\ f_j(x).$$

Die Fourier-Transformierte von f ist dann im wesentlichen getragen auf der Vereinigung der *dualen* Rechtecke R_j^* mit Mittelpunkt a_j. Man kann auch zeigen, dass für geeignete Wahl der Vorzeichen ± 1 nicht sehr viele Spitzen (bzw. Auslöschungen) von $\hat{f}$ auftreten (genauer: es gilt $\int |\hat{f}|^4 d\xi \leq c\delta^4 \log 1/\delta$).



$\cup_j R_j$, Träger der f_j's.



$\cup_j R_j^*$, wesentliche Träger der $\widehat{f_j}$'s.

Theorem 2.1 (Besicovitch 1928)**.** *Bei geeigneter Wahl der a_j's gilt*

$$| \cup_{j=1}^N R_j^* | \leq \frac{1000\ \delta^{-2}}{\log\log \frac{1}{\delta}}. \tag{2.4}$$

Was sagt uns nun der Satz von Besicovitch? Zunächst bemerken wir, dass bei einer gleichmässigen Amplituden- und Phasenverteilung im Kreisring S_δ die Strahlung in einer Kreisscheibe, die in großer Entfernung zum Ursprung liegt und Radius $1/\delta$ hat, in etwa gleichmässig verteilt ist. Wenn wir jedoch einen Amplituden- und Phasenverteilung durch obige Funktion f vorgeben, so können wir erreichen, dass die Strahlung in innerhalb einer Kreischeibe von Radius $1/\delta$ auf einem sehr kleinen Bereich konzentriert ist (falls δ hinreichend klein wird).

Bemerkung: A. Besicovitch hat ursprünglich mit der Konstruktion eine Frage aus dem Jahr 1917 des japanischen Mathematikers S. Kakeya beantwortet. Diese fragt nach dem Infimum des Flächeninhalts von Flächen in der Ebene in denen man eine Nadel (Geradenstück der Länge 1) um 360 Grad drehen kann. Antwort: 0.

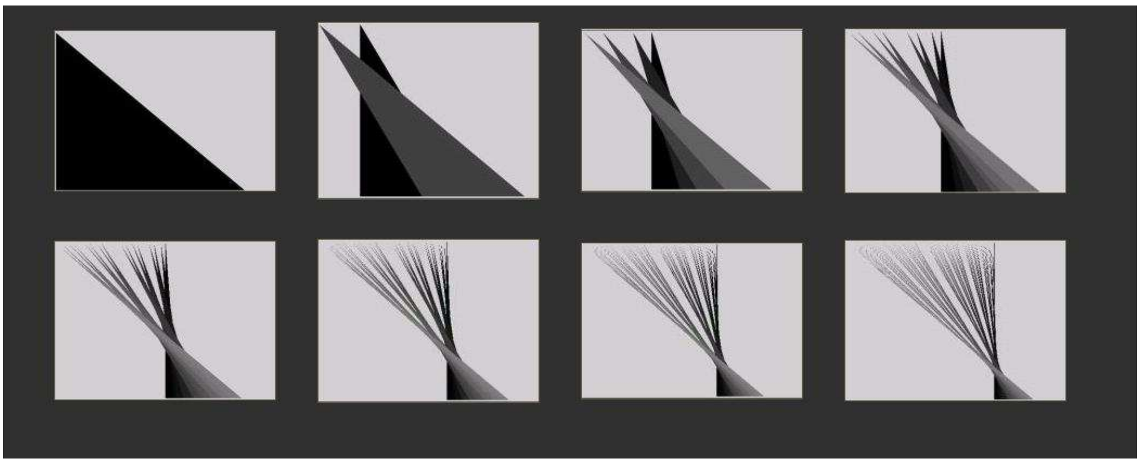


Abbildung 2: Besicovitch's Konstruktion.

Die Konstruktion von Besicovitch hat weitreichende Konsequenzen für die Analysis:

Theorem 2.2 (C. Fefferman 1971). *Für jedes $p < 2$ existiert eine zur p-ten Potenz integriebare Funktion $f : [-\pi, \pi]^2 \to \mathbb{C}$, so dass die Partialsummen der Fourier-Reihe von f,*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^2, m_1^2 + m_2^2 \leq R^2} \hat{f}(m)\ e^{im \cdot x},$$

für $R \to \infty$ fast überall divergiert.

Theorem 2.3 (Busemann und Feller 1935). *Es gibt eine Lebesgue messbare Menge A mit $|A| = 1$ und eine messbare Menge B mit $|B| = 2$ mit folgenden Eigenschaften: Für jedes $x \in B$ existiert eine Folge von Rechtecken $\{R_j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ die x enthalten, deren Druchmesser für $j \to \infty$ gegen 0 konvergiert und so, dass*

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{1}{|R_j(x)|} \iiint_{R_j(x)} \chi_A(y)\ dy > 1/2$$

für $x \in B$ ist.

Es besteht heute ein besonderes Interesse an der Frage: Wie klein kann der Flächeninhalt der Vereinigung der R_j^* werden? Folgende untere Abschätzung für (2.4) wurde durch verschiedene Methoden gezeigt.

Theorem 2.4 (C. Fefferman 1971, Carberry 1990, Bourgain 1992, Davies 1971). *Für jede Wahl der a_j's gilt*

$$\frac{\delta^{-2}}{1000 \log \frac{1}{\delta}} \leq | \cup_{j=1}^N R_j^* |.$$

Unser urspüngliches Problem die Strahlung I_λ im Raum zu untersuchen, d.h. in $\mathbb{R}^3$, führt nun wenn man eine Amplituden- und Phasenverteilung auf einer Sphärischen Schale der Dicke δ vorgibt auf folgendes Problem:

Das Kakeya Problem: Gegeben seien $N \approx 1/\delta$ Richtungen im Raum, also N Punkte $x_1, \ldots, x_N$ auf einer Sphäre vom Radius 1, deren Abstand mindestens $1/\sqrt{\delta}$ ist, $0 < \delta < 1$, und N Rechtecke R_j^* mit Kantenlängen $1/\sqrt{\delta} \times 1/\delta \times 1/\delta$ deren längste Kante in Richtung x_j zeigt. Wie klein kann das Volumen

$$| \cup_j R_j^* |$$

werden? Vermutung: $\frac{\delta^{-3}}{\log 1/\delta} \leq | \cup_j R_j^* |$.

3 Diskurs: Das Kakeya Problem und Zahlentheorie.

In der Zahlentheorie besagt die Riemannsche Vermutung, dass die Anzahl $\pi(N)$ der Primzahlen im Interval $[1, N]$ die Ungleichung

$$|\pi(N) - \frac{N}{\log N}| \leq C \frac{\sqrt{N}}{\log N}$$

erfüllt. Dies ist äquivalent zu: Die meromorphe Funktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

hat keine Nullstellen in komplexen Zahlen $z = s + it$ falls $\frac{1}{2} < s \leq 1$. Anders formuliert:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

hat keine Polstellen für $\frac{1}{2} < s \leq 1$, hier ist $\mu(n)$ die Möbius-Funktion deren Wert in Abhängigkeit von der Primfaktorzerlegung von n entweder $0, 1$ oder -1 ist. Man muss also obere Schranken für $\frac{1}{\zeta(z)}$ finden, will man die Riemannsche Vermutung bestätigen. Dazu kann man versuchen Schranken an Teilsummen, etwa

$$T_k(z) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

zu finden. Eine (offene) Vermutung von H. Montgomery besagt, dass wenn man $\mu(n)$ durch beliebige Zahlen a_n aus $\{0, 1, -1\}$ ersetzt, folgende Abschätzung gilt:

$$\int_E |T_k(it)|^2 \, dt \leq \; 2^k \; (2^k + |E|) \; 2^{k/\log\log k},$$

hier ist $|E|$ dass Maß einer Menge $E \subset [0, 2^{2k}]$.

Theorem 3.1 (J. Bourgain [2],1993)**.** *Die Montgomery Vermutung impliziert die Kakeya Vermutung.*

4 Das Kakeya Problem über endlichen Körpern und Kombinatorik.

Bisher ist es noch nicht gelungen die Kakeya Vermutung im $\mathbb{R}^3$ zu bestätigen. Daher wird versucht analoge Probleme in *einfacheren* Geometrien zu studieren. Ein Ansatz besteht darin zunächst eine entsprechende Vermutung über endlichen Geometrien zu untersuchen. Dazu fixieren wir zunächst eine Primzahl p und betrachten einen n-dimensionalen Vekorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Unter einer Geraden in $\mathbb{F}^n$ durch den Punkt $a \in \mathbb{F}^n$ in Richtung $b \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ verstehen wir die Menge

$$G_{a,b} := \{a + tb \in \mathbb{F}^n \,|\, t \in \mathbb{F}\}.$$

Da für $s \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $G_{a,sb} = G_{a,b}$ ist, gibt es $\frac{p^n-1}{p-1}$ viele verschiedene Richtungen von Geraden, also für große p in etwa p^{n-1} viele Richtungen. Mit $|E|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer endliche Menge E.

Eine Teilmenge von $\mathbb{F}^n$ die eine Gerade in jede Richtung enthält nennt man Kakeya Menge.

Kakeya Vermutung für $\mathbb{F}^n$: Für jede Kakeya Menge $E \subset \mathbb{F}^n$ gilt

$$|E| \geq \; c \, p^n,$$

wobei c unabhängig von p ist.

Für eine erste untere Schranke für die Anzahl der Punkte in einer Kakeya Menge in $\mathbb{F}^n$ betrachten wir zunächst für eine beliebige Menge von Punkten P in $\mathbb{F}^n$ und eine Menge von Geraden L in $\mathbb{F}^n$ die Inzidenzmenge

$$I = \{(x, G) \in P \times L \,|\, x \in G\}.$$

Es gilt dann das

Lemma 4.1. $|I| \leq min\{|P|^{1/2}|L| + |P|, |L|^{1/2}|P| + |L|\}$.

Beweis: Es ist vermöge der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|I| = \sum_{G\in L}\sum_{x\in P}\chi_G(x) \leq \big(\sum_{G\in L} 1\big)^{1/2}\big(\sum_{G\in L}|\sum_{x\in P}\chi_G(x)|^2\big)^{1/2}$$

Also

$$|I|^2 \leq |L|\sum_{G\in L}\sum_{x\in P}\ \chi_G(x)\ \sum_{y\in P}\chi_G(y)$$
$$= |L|\big(\sum_{G\in L}\sum_{x=y}\chi_G(x)\chi_G(y) + \sum_{G\in L}\sum_{x\neq y}\chi_G(x)\chi_G(y)\big)$$

Offenbar ist $\sum_{G\in L}\sum_{x=y}\chi_G(x)\chi_G(y) = |I|$ und da durch zwei Punkte $p \neq q$ nur eine Gerade geht, ist die zweite Summe durch $|P|^2$ beschränkt, also gilt

$$|I|^2 \leq |L|(|I| + |P|^2),$$

und mit quadratischer Ergänzung erhält man: $(|I| - |L|/2)^2 \leq |L||P|^2 + |L|^2/4$, d.h. $|I| - |L|/2 \leq |L|^{1/2}|P| + |L|/2$. Entsprechend zeigt man unter Ausnutzung, dass zwei Geraden sich höchstens in einem Punkt schneiden, dass $|I| \leq |P|^{1/2}|L| + |P|$. $\Box$

Ist nun P eine Kakeya Menge und L die Menge der Geraden in P, also $P = \cup_{G\in L}G$, so ist, da auf jeder Geraden genau p Punkte liegen:

$$|I| = p|L| \leq |L|^{1/2}|P| + |L|,$$

d.h. $|P| \geq (p-1)|L|^{1/2}$. Wegen $|L| \approx p^{n-1}$ also $|P| \geq cp^{\frac{n+1}{2}}$.

Folgende Verbesserungen sind bekannt.

Theorem 4.2 (T. Wolff [6], 1995). *Jede Kakeya Menge $E \subset \mathbb{F}^n$ erfüllt*

$$|E| \geq c\ p^{\frac{n+2}{2}},$$

Für $n \geq 8$ gilt folgendes Resultat, welches auf vorherigen Arbeiten von T. Tao und N. Katz basiert.

Theorem 4.3 (T. Tao und M. [4], 2002). *Jede Kakeya Menge $E \subset \mathbb{F}^n$ erfüllt*

$$|E| \geq c\ p^{(4n+3)/7}.$$

Für $n = 3$ ist das beste Resultat zur Zeit

Theorem 4.4 (J. Bourgain, T. Tao und N. Katz[1], 2003). *Jede Kakeya Menge $E \subset \mathbb{F}^3$ erfüllt*

$$|E| \geq c\ p^{\frac{5}{2}+\frac{1}{10^{10}}}.$$

Literatur

[1] J. Bourgain, N. Katz, T. Tao, A sum-product estimate in finite fields, and applications, *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), 27-57.

[2] J. Bourgain, Remarks on Halasz-Montgomery type inequalities. *Geometric aspects of functional analysis* (Israel, 1992-1994), 25-39, Oper. Theory Adv. Appl. 77, Birkhäuser, Basel 1995.

[3] G. Mockenhaupt, *Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integrals.* Habilitationsschrift, Siegen, 1996. unter http://www-math-analysis.ku-eichstaett.de/~gerdm/forschung/pub/

[4] G. Mockenhaupt, T. Tao, *Kakeya and restriction phenomena for finite fields*, Duke Math. J.

[5] H. Montgomery. *Ten Lectures on the interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis.* CBMS, Vol. 84. AMS, 1994.

[6] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Revista Mat. Iberoamericana. **11** (1995). 651–674.